Wir gehen von der Gleichung $c = b^a$ und dem Beispiel $8 = 2^3$ aus:

$x = b^a$ x nennt man → Potenz
b nennt man → Basis
a nennt man → Exponent

Allgemein:

"Unter $x = b^a$ versteht man
die a-te Potenz zur Basis b"
"x ist b hoch a"

Beispiel: $x = 2^3 = 8$ Vorgang: potenzieren
"8 ist die 3. Potenz zur Basis 2"
"8 ist 2 hoch 3"

$c = x^a$ c nennt man → Potenz
x nennt man → Basis
a nennt man → Exponent

Allgemein:

Unter $x = \sqrt[a]{c}$ versteht man
die Basis x in der Gleichung c=x^a
"x ist die a-te Wurzel aus c"

Beispiel: $8 = x^3; x = \sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$ Vorgang: Wurzel ziehen
"2 ist die 3. Wurzel von 8"

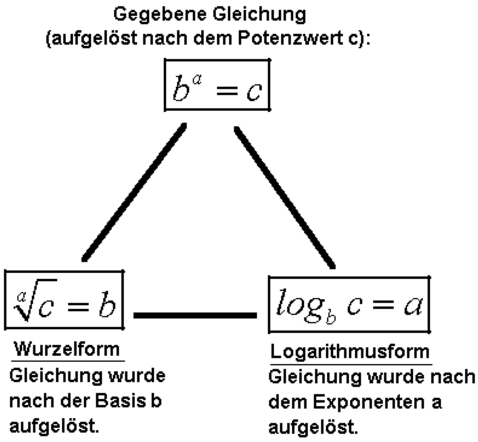
$c = b^x$ c nennt man → Potenz
b nennt man → Basis
x nennt man → Exponent

Allgemein:

Unter $x = \log_b c$ versteht man
den Exponenten x in der Gleichung c=b^x
"x ist der Logarithmus von c zur Basis b"

Beispiel: $8 = 2^x; x = \log_2(8) = 3$ Vorgang: logarithmieren
"3 ist der Logarithmus von 8 zur Basis 2"
"3 ist der 2er-Logarithmus von 8"

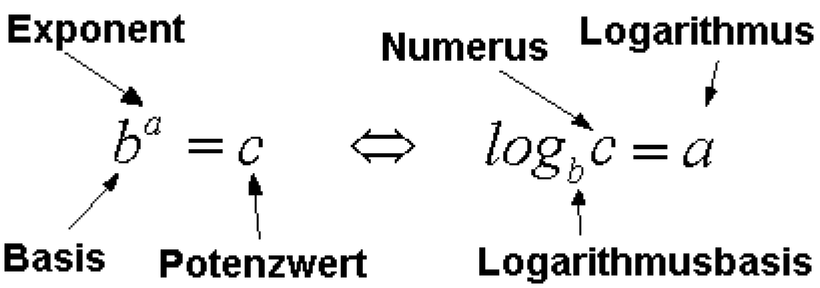
Zusammenfassung:



Das Bild fasst nochmals zusammen, was wir bisher erklärt haben:
Die Gleichung $b^a = c$ kann man noch auf zwei andere Arten schreiben:
Als Wurzel oder als Logarithmus.

Welche Schreibweise man wählt, hängt immer davon ab, welche der Grössen (Basis, Exponent, Potenzwert) unbekannt ist, d.h. nach welcher Grösse (Basis, Exponent, Potenzwert) die Formel umgestellt werden soll.

Wenn man von der Potenzschreibweise einer Gleichung zur Logarithmusschreibweise übergeht, dann verändern sich auch die Bezeichnungen:



Die Tabelle fasst das Bild nochmals zusammen:

Variable	Potenzschreibweise	Logarithmusschreibweise
a	Exponent	Logarithmus
b	Basis	Logarithmusbasis (Basis)
c	Potenzwert (Potenz)	Numerus

Bsp. 1

Gesucht ist:	$\log_3 9 = x$
Äquivalente Gleichung:	$3^x = 9$
In Worten:	Mit welcher Zahl x muss ich 3 potenzieren um die Zahl 9 zu erhalten?
Wir finden:	$x = 2$

Bsp. 2

Gesucht ist:	$\log_2 16 = x$
Äquivalente Gleichung:	$2^x = 16$
In Worten:	Mit welcher Zahl x muss ich 2 potenzieren um die Zahl 16 zu erhalten?
Wir finden:	$x = 4$

Bsp. 3

Gesucht ist:	$\log_5 125 = x$
Äquivalente Gleichung:	$5^x = 125$
In Worten:	Mit welcher Zahl x muss ich 5 potenzieren um die Zahl 125 zu erhalten?
Wir finden:	$x = 3$

Bsp. 4

Gesucht ist:	$\log_{10} 1000 = x$
Äquivalente Gleichung:	$10^x = 1000$
In Worten:	Mit welcher Zahl x muss ich 10 potenzieren um die Zahl 1000 zu erhalten?
Wir finden:	$x = 3$

Übung 1

Gesucht ist:	$\log_{10}100 = x$
Äquivalente Gleichung:	
In Worten:	Mit welcher Zahl x muss ich ___ potenzieren um die Zahl ___ zu erhalten?
Wir finden:	

Übung 2

Gesucht ist:	$\log_{2}32 = x$
Äquivalente Gleichung:	
In Worten:	Mit welcher Zahl x muss ich ___ potenzieren um die Zahl ___ zu erhalten?
Wir finden:	

Übung 3

Gesucht ist:	$\log_{3}81 = x$
Äquivalente Gleichung:	
In Worten:	Mit welcher Zahl x muss ich ___ potenzieren um die Zahl ___ zu erhalten?
Wir finden:	

Übung 4

Gesucht ist:	$\log_{0.5} 0.25 = x$
Äquivalente Gleichung:	
In Worten:	Mit welcher Zahl x muss ich ___ potenzieren um die Zahl ___ zu erhalten?
Wir finden:	

Lösungen siehe Seite 6

Der Basiswechselsatz:

Damit können wir endlich Logarithmen mit dem TR berechnen!

Wenn ein Logarithmus zur Basis a nicht bekannt ist, kann man ihn mit dem Basiswechselsatz in den Quotienten zweier Logarithmen zur Basis b umwandeln:

$$\boxed{\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}}$$

Mit dem TR:

Wir möchten $\log_3(107)$ berechnen. Da wir keine $\log_3 -$Funktion haben, müssen wir die Berechnung mit einer anderen Basis durchführen. Es stehen auf den Rechnern der Zehner-Logarithmus und/oder der 'logarithmus naturalis' zur Verfügung.
Es gibt Rechner, die habe beide Funktionen, den 'ln' und den 'log'; andere jedoch nur den 'ln'. (Der $\log_{10}$ wird mit $\log$ abgekürzt).

Der 10er-Logarithmus hat die Basis 10

Der logarithmus naturalis hat die Basis e = 2,718281828…

Diese Basis ist nach dem Basler Mathematiker Leonhard Euler benannt und hat eine grosse Bedeutung in der höheren Mathematik. Diese 'krumme' Basis soll Sie nicht stören, der TR kann damit genau so gut rechnen wie mit der 'nicht krummen' Basis 10.

Also: $\log_3(107) = \frac{\ln(107)}{\ln(3)} = \frac{\log(107)}{\log(3)} \approx 4{,}2534;\ \text{Test}:\ 3^{4{,}2534} \approx 107{,}0009$

Lösungen zu den Aufgaben Seite 4

Lösung 1

Gesucht ist:	$\log_{10}100 = x$
Äquivalente Gleichung:	$10^x = 100$
In Worten:	Mit welcher Zahl x muss ich 10 potenzieren um die Zahl 100 zu erhalten?
Wir finden:	$x = 2$

Lösung 2

Gesucht ist:	$\log_2 32 = x$
Äquivalente Gleichung:	$2^x = 32$
In Worten:	Mit welcher Zahl x muss ich 2 potenzieren um die Zahl 32 zu erhalten?
Wir finden:	$x = 5$

Lösung 3

Gesucht ist:	$\log_3 81 = x$
Äquivalente Gleichung:	$3^x = 81$
In Worten:	Mit welcher Zahl x muss ich 3 potenzieren um die Zahl 81 zu erhalten.
Wir finden:	$x = 4$

Lösung 4

Gesucht ist:	$\log_{0.5} 0.25 = x$
Äquivalente Gleichung:	$0.5^x = 0.25$
In Worten:	Mit welcher Zahl x muss ich 0.5 potenzieren um die Zahl 0.25 zu erhalten?
Wir finden:	$x = 2$

Logarithmengesetze:

$\log_b\left(a^c\right)=c\cdot\log_b a$		(hoch)	Log einer Potenz
	$\Leftrightarrow$	(mal)	Exponent mal Log
$\log_b\left(a\cdot c\right)=\log_b a+\log_b c$		(mal)	Log eines Produktes
	$\Leftrightarrow$	(plus)	Logarithmen addieren
$\log_b\left(\frac{a}{c}\right)=\log_b a-\log_b c$		(durch)	Log eines Quotienten
	$\Leftrightarrow$	(minus)	Logarithmen subtrahieren
$\log_b\left(a+c\right)=$ 		(plus)	Log einer Summe
	$\Leftrightarrow$	(nichts)	*keine* Logarithmusregel

Der Basiswechselsatz:

$$\log_b c=\frac{\log_d c}{\log_d b}=\frac{\log c}{\log b}=\frac{\ln c}{\ln b}$$

Die einzige Formel für die kommenden Anwendungen: 'Kako-Formel'

$$K_a = K_0 \cdot (1+p)^a$$

→ Kurzform: $K_a = K_0 \cdot q^a$ mit $q = 1+p$

in diversen Büchern wird missverständlich $K_a = K_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^a$ geschrieben.

In diversen Büchern wird häufig – vom Kaufmännischen her kommend – a durch n ersetzt:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$

Erklärung der Variablen:

K_0 Anfangskapital (Kapital zum Zeitpunkt 0, Kapital bei Kontoeröffnung)

a Zeit in Jahren der Geldanlage; a wie Anlagedauer, a wie ‚année
(in gewissen Formelsammlungen mit n bezeichnet)

p Zinssatz, Zinsfuss; p wie Prozente: Beispiel: p=5%=0.05

q Zinsfaktor; mit dem schreibt sich die Formel einfacher: $q = 1+p$

K_a Endkapital (Kapital nach einer Anlage von a Jahren
(in gewissen Formelsammlungen mit K_n bezeichnet)

1a Kapitalvermehrung – Zinseszinsrechnung (1)

Ein Kapital von 5'000 Fr. wird zu 3% verzinst.
Welches Kapital kann man auf der Bank nach 11 Jahren abholen wenn man nie Einlagen und Rückzüge getätigt hat?

$x_{11} = 5'000 \cdot 1{,}03^{11} \approx 6'921\,\text{Fr.}$ **$\underline{K_{11} = 6'921 \text{ Fr.}}$** → Potenzrechnung

Diese Rechnung ist unser Musterbeispiel für exponentielles Wachstum – die Variable x ist ein Kapital.

1b Kapitalvermehrung – Zinseszinsrechnung (2)

Ein Kapital von 5'000 Fr. ist nach 11 Jahren auf 6'921 Fr. angewachsen.
Zu wie viel Prozent wurde es angelegt?

$$K_{11} = 5'000 \cdot x^{11} = 6'921\,\text{Fr.}$$

$$x^{11} = \frac{6'921}{5'000}$$

$$x = \sqrt[11]{\frac{6'921}{5'000}} = \left(\frac{6'921}{5'000}\right)^{\frac{1}{11}} \approx 1{,}0299977$$

$\underline{p = 3\%}$ → Wurzelrechnung

Diese Rechnung ist unser Musterbeispiel für exponentielles Wachstum – die Variable x befindet sich in der Basis.

1c Kapitalvermehrung – Zinseszinsrechnung (3)

Ein Kapital von 5'000 Fr. wird zu 3% verzinst.
Nach wie vielen Jahren ist es auf 6'921 Fr. angewachsen?

$$K_x = 5'000 \cdot 1{,}03^x = 6'921\,\text{Fr.} \qquad \Big|\ \cdot 5'000 \text{ Fr.}$$

$$1{,}03^x = \frac{6'921}{5'000} \qquad \Big|\ \text{auf beiden Seiten logarithmieren (log oder ln)}$$

$$\log 1{,}03^x = \log\left(\frac{6'921}{5'000}\right) \qquad \Big|\ \text{TU: rechts Log-Gesetz 1 (Log einer Potenz) anwenden}$$

$$x \cdot \log 1{,}03 = \log\left(\frac{6'921}{5'000}\right) \qquad \Big|\ :\ \log(1{,}03)$$

$$x = \frac{\log\left(\frac{6'921}{5'000}\right)}{\log 1{,}03} = 10.9991722$$

$\underline{x = 11 \text{ Jahre}}$ → Logarithmusrechnung

Diese Rechnung ist unser Musterbeispiel für exponentielles Wachstum – die Variable x befindet sich im Exponenten.

1. **Bevölkerungswachstum**
   Eine Stadt hat heute 100'000 Einwohner. Der zukünftige jährliche Zuwachs wird auf 2% geschätzt. Wie viele Einwohner wird diese Stadt in 20 Jahren haben?

2. **Bevölkerungswachstum**
   Eine Stadt hatte vor 20 Jahren 100'000 Einwohner, heute sind es 187'800 Einwohner. Wie gross war der durchschnittliche jährliche Zuwachs?

3. **Bevölkerungswachstum**
   Eine Stadt hat heute K Einwohner. Der jährliche Zuwachs wird auf 2,5% geschätzt. Wann wird sich die Einwohnerzahl verdoppelt haben?

4. **Bevölkerungswachstum - Bestimmung zweier Grössen**
   Eine Stadt hatte 1890 eine Einwohnerzahl von 157'867
   und 1920 eine von 210'899.
   Wie viele Einwohner hatte sie 2007 und was war die durchschnittliche jährliche Zuwachsrate?

   Berechnung der Zuwachsrate:

Berechnung der Einwohnerzahl 2007:

5. Lichtmenge in trübem Gewässer

In einem Gewässer nimmt die Menge Licht mit jedem Meter um 10% ab.
In welcher Tiefe ist nur noch ein Viertel des Lichtes an der Oberfläche vorhanden?

6. Jährliche Spesen

Eine Bank zieht jährlich 1% des Wertschriftendepots als Verwaltungsgebühren ab. Seit der Depoteröffnung erwirtschaftete dieser Kunde durch Aktienkäufe und -verkäufe einen Vermögenszuwachs von jährlich 0,7%.
Bis heute hat der Kunde 10% seines Vermögens verloren. Vor wie vielen Jahren hat er das Depot eröffnet?

1. Bevölkerungswachstum

Eine Stadt hat heute 100'000 Einwohner. Der zukünftige jährliche Zuwachs wird auf 2% geschätzt. Wie viele Einwohner wird diese Stadt in 20 Jahren haben?

$100'000 \cdot 1{,}02^{20} \approx 148'595$ Sie wird etwa 148'595 Einwohner haben

2. Bevölkerungswachstum

Eine Stadt hatte vor 20 Jahren 100'000 Einwohner, heute sind es 187'800 Einwohner. Wie gross war der durchschnittliche jährliche Zuwachs?

$$100'000 \cdot b^{20} = 187'800$$

$$b^{20} = \frac{187'800}{100'000} = 1{,}878$$

$$b = \sqrt[20]{1{,}878} = 1{,}878^{\frac{1}{20}} \approx 1{,}032$$

Der jährliche Zuwachs beträgt ca. 3,2%

3. Bevölkerungswachstum

Eine Stadt hat heute q Einwohner. Der jährliche Zuwachs wird auf 2,5% geschätzt. Wann wird sich die Einwohnerzahl verdoppelt haben?

$$q \cdot 1{,}025^{x} = 2 \cdot q$$

$$1{,}025^{x} = 2$$

$$x \cdot \ln 1{,}025 = \ln 2$$

$$x = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}025} = 28{,}1$$

In gut 28 Jahren wird die Stadt doppelt so viele Einwohner haben

4. Bevölkerungswachstum - Bestimmung zweier Grössen

Eine Stadt hatte 1890 eine Einwohnerzahl von 157'867 und 1920 eine von 210'899. Wie viele Einwohner hatte sie2007 und was war die durchschnittliche jährliche Zuwachsrate?

Berechnung der Zuwachsrate:

$$157'867 \cdot b^{30} = 210'899$$

$$b^{30} = \frac{210'899}{157'867}$$

$$b = \left(\frac{210'899}{157'867}\right)^{\frac{1}{30}} = 1{,}009701$$

Die Zuwachsrate betrug 0,9701%

Berechnung der Einwohnerzahl 2007:

$210'899 \cdot 1{,}009701^{87} \approx 488'480$ oder

$157'867 \cdot 1{,}009701^{117} \approx 488'481$

Die heutige Einwohnerzahl ist ca. 488'480

Beachten Sie die Rundungsdifferenz von 1, obwohl wir die Zuwachsrate auf 6(!) Stellen genau eingesetzt haben.
Würden wir die Zuwachsrate auf 1% runden, erhielten wir folgende Zahlen:

$210'899 \cdot 1{,}01^{87} \approx 501'227$ oder

$157'867 \cdot 1{,}01^{117} \approx 505'699$ das sind immerhin fast 20'000 mehr.

5. Lichtmenge in trübem Gewässer

In einem Gewässer nimmt die Menge Licht mit jedem Meter um 10% ab.
In welcher Tiefe ist nur noch ein Viertel des Lichtes an der Oberfläche vorhanden?

$$L \cdot (1-0{,}1)^x = L \cdot 0{,}9^x = 0{,}25 \cdot L$$

$$0{,}9^x = 0{,}25$$

$$x \cdot \ln(0{,}9) = \ln(0{,}25)$$

$$x = \frac{\ln(0{,}25)}{\ln(0{,}9)} \approx 13{,}2\,\text{m}$$

6. Jährliche Spesen

Eine Bank zieht jährlich 1% des Wertschriftendepots als Verwaltungsgebühren ab. Seit der Depoteröffnung erwirtschaftete dieser Kunde durch Aktienkäufe und -verkäufe einen durchschnittlichen Vermögenszuwachs von jährlich 0,7%. Bis heute hat der Kunde 10% seines Vermögens verloren. Vor wie vielen Jahren hat er das Depot eröffnet?

Der jährliche Verlust betrug 0,3%.

$$K \cdot (1-0{,}003)^x = K \cdot 0{,}997^x = 0{,}9 \cdot K$$

$$0{,}997^x = 0{,}9$$

$$x \cdot \ln(0{,}997) = \ln(0{,}9)$$

$$x = \frac{\ln(0{,}9)}{\ln(0{,}997)} = 35{,}07$$

Der Kunde hat das Depot vor rund 35 Jahren eröffnet